Exercice sur le cours 10

May 13, 2013

Dans ce problème nous considérons l'équation de la chaleur posée dans une couronne de révolution comme indiqué sur la figure 1. L'ouvert délimité par cette couronne est noté Ω et sa frontière comprend les deux cercles de rayon r_0 et r_1. La température que l'on suppose axisymétrique (indépendante de l'angle θ) est solution du système suivant où l'on a utilisé la coordonnée polaire r et les notations de la figure 1.Les coefficients $\varrho c_v, k, \xi$ sont des constantes strictement positives et f ne dépend que de r):

$$\begin{cases} \varrho c_v \dfrac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T = f \text{ dans } \Omega,\ T(r,0) = T_0(r), \\ \\ k\dfrac{\partial T}{\partial \nu} = \xi(T_{int} - T) \text{ sur } \Gamma_{int},\ \dfrac{\partial T}{\partial \nu} = \xi(T_{ext} - T) \text{ sur } \Gamma_{ext}, \end{cases} \tag{1}$$

On rappelle que le laplacien en coordonnées polaires s'écrit:

$$\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2},$$

et bien entendu si T ne dépend pas de θ:

$$\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}).$$

1 Première partie: cas statique

- **Question 1** On s'intéresse au cas où T ne dépend pas du temps ni de θ. On suppose également que $f = 0$. Montrer que la solution T est de la forme:

  $$T(r) = A + B\log r. \tag{2}$$

  En utilisant les conditions aux limites en $r = r_0$ et $r = r_1$, écrire un système de deux équations en A et B que l'on résoudra. Donner enfin l'expression de la solution T dans ce cas.

- **Question 2** On pose $V = H^1(]r_0, r_1[)$ et on introduit la forme bilinéaire sur V définie par:

  $$a(T, v) = k\int_{r_0}^{r_1} r\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \xi[r_0 T(r_0)v(r_0) + r_1 T(r_1)v(r_1)], \tag{3}$$

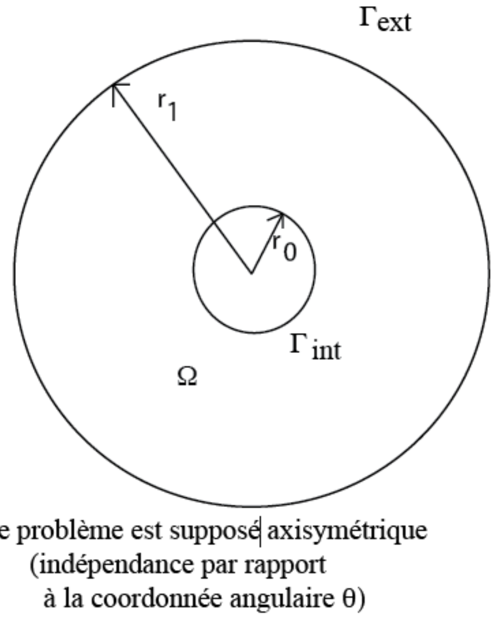

Figure 1: Quelques notations et l'ouvert de calcul

et la forme linéaire;

$$l(v) = \int_{r_0}^{r_1} rfv + \xi[r_1 T_{ext}(r_1)v(r_1) + r_0 T_{int}(r_0)v(r_0)]. \tag{4}$$

Donner une formulation variationnelle du modèle (1) dans le cas statique en utilisant la forme bilinéaire $a(.,.)$ et la forme linéaire $l(.)$. Montrer qu'il existe une constante $c_1 > 0$ dont on donnera une expression telle que:

$$\forall v \in V,\ a(v,v) \geq c_1 ||v||^2_{1,2,]r_0,r_1[}. \tag{5}$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram dont on vérifiera les hypothèses, monter que si $f \in L^2(]r_0, r_1[)$ alors le modèle variationnel admet une solution unique. Est-ce encore vrai si on a seulement $f \in L^1(]r_0, r_1[)$? (on a seulement pour mémoire $L^2(]r_0, r_1[) \subset L^1(]r_0, r_1[)$).

- **Question 3** On construit un maillage régulier de $N-1$ éléments de longueur $h = \dfrac{r_1 - r_0}{N-1}$ de l'ouvert $\omega =]r_0, r_1[$. Il y a donc N points de discrétisation et autant de fonctions de base. On utilise l'élément fini P_1-Lagrange pour construire l'espace V^h d'approximation de V. On rappelle l'estimation d'erreur théorique que l'on ne cherchera pas à démontrer (π est l'opérateur d'interpolation de Lagrange et la constante c_0 est indépendante de h et de v):

$$\exists c_0 > 0,\ \forall v \in H^2(]r_0, r_1[),\ ||\pi v - v||_{1,2,]r_0,r_1[} \leq c_0 h |v|_{2,2,]r_0,r_1[}. \tag{6}$$

Le problème approché consiste à trouver $T^h \in V^h$ telle que:

$$\forall v \in V^h,\ a(T^h, v) = l(v). \tag{7}$$

Mettre ce modèle approché sous forme matricielle en explicitant A:

$$AX = b, \tag{8}$$

Les composantes du vecteur $X \in \mathbb{R}^N$ sont les composantes de T^h dans la base w_i des fonctions de base de V^h ($w_i((j-1)h + r_0) = \delta_{ij},\ i,j \in \{1, N\}$), le vecteur $b \in \mathbb{R}^N$ a pour composantes: $b_i = \displaystyle\int_{r_0}^{r_1} r f w_i$ et les coefficients de la matrice A sont: $a_{ij} = a(w_i, w_j)$. On notera, pour calculer la matrice A, que sur chaque segment $[ih, (i+1)h]$ une fonction linéaire $q(r)$, vérifie:

$$\int_{ih}^{(i+1)h} q = \frac{h}{2}(q(ih) + q((i+1)h)).$$

- **Question 4** On suppose ici que $N = 2$ c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un élément entre r_0 et r_1. Par ailleurs on suppose $f = 0$. Donner l'expression de la solution approchée aux points $r = r_0$ et $r = r_1$. Comparer ces résultats avec ceux de la question 1.

- **Question 5** En utilisant l'estimation d'erreur théorique rappelée en (6), montrer qu'il existe une constante $c_2 > 0$ indépendante de h et de T telle que (on utilisera le lemme de Jean Cea vu en cours):

$$||T^h - T||_{1,2,]r_0,r_1[} \leq c_2 \frac{|T|_{2,2,]r_0,r_1[}}{N-1}. \tag{9}$$

2 Seconde partie: calcul des valeurs propres

On s'intéressse maintenant au problème spectral suivant:

$$\begin{cases} \text{trouver } \lambda \in \mathbb{R}^+,\ w \in V = H^1(]r_0, r_1[) \text{ tel que:} \\ \\ \forall v \in V,\ \lambda m(w,v) = a(w,v),\ m(w,w) = 1, \\ \\ m(u,v) = \varrho c_v \displaystyle\int_{r_0}^{r_1} ruv. \end{cases} \tag{10}$$

- **Question 6** Expliquer rapidement pourquoi on peut appliquer le théorème spectral au problème (10) et on énoncera le résultat. Donner l'expression de la solution du modèle (1) en utilisant la base de mode propres trouvés que l'on notera w_i. Pour cela on posera:

$$T(x,t) = \sum_{i=1,\infty} \alpha_i(t) w_i(x), \tag{11}$$

et on vérifiera que les coefficients α_i sont solutions d'équations de la forme (on précisera ce que sont les termes λ_i et f_i et on précisera la condition initiale $\alpha_i(0)$ en fonction de T_0 et à l'aide de $m(.,.)$):

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \lambda_i \alpha_i = f_i. \tag{12}$$

- **Question 7** On approche le problème (10) par la même méthode d'éléments finis que dans la première partie. Calculer les solutions du problème suivant:

$$\lambda^h M W = A W,\ W \in \mathbb{R}^N \tag{13}$$

où A et M sont les matrices obtenues par la méthode d'éléments finis lorsque $N = 2$ (il y a donc deux valeurs propres et deux vecteurs propres et on utilisera la formule de Simpson pour intégrer les polynômes du troisième degré).

3 Troisième partie: calcul des solutions transitoires par la MEF

- **Question 8** On utilise le schéma de Wilson avec $\theta = 0$ pour résoudre le système différentiel matriciel obtenu après discrétisation en espace par la MEF décrite précédemment. Quels sont les avantages et les inconvénients de cette approche? Préciser la condition de stabilité sur le pas de temps dans le cas de la question précédente ($N = 2$).

- **Question 9** En imaginant que le milieu occupé par l'ouvert Ω soit de l'air convecté à la vitesse $U > 0$, le modèle deviendrait (on utilise les notations antérieures):

$$\left\{\begin{array}{l} \text{trouver } T(x,t) \in V \text{ telle que:} \\ \\ \forall v \in V,\ m(\dfrac{\partial T}{\partial t}, v) + Ub(T,v) + a(T,v) = l(v),\ \text{et } T(x,0) = T_0(x) \text{ dans }]r_0, r_1[\\ \\ \text{avec la nouvelle notation: } b(T,v) = \varrho c_v \displaystyle\int_{r_0}^{r_1} r \frac{\partial T}{\partial r} v. \end{array}\right. \tag{14}$$

Apprès discrétisation par la MEF on obtient un système différentiel matriciel de la forme:

$$M \frac{\partial X}{\partial t} + (UB + A)X = b,\ X(0) = X_0. \tag{15}$$

Donner l'expression de la matrice B pour $N = 2$. Quelles seraient les difficultées que l'on rencontrerait en utilisant un schéma de Wilson avec $\theta = .5$ dans cette situation?

Retour à l'écran précédent: cliquez ici.