Exercice sur le cours 4 CSC108

July 28, 2013

Ce petit problème aborde quelques notions de mécanique de la rupture pour une structure mécanique en mouvement anti-plan (perpendiculaire à son plan). On note Ω un ouvert du plan présentant une fissure de longueur a. La frontière de $\overline{\Omega}$ est notée Γ_0 et les deux frontières internes à Ω correspondant aux lèvres de la fissure sont Γ_+ et Γ_-. Par commodité l'origine des axes O est placé au fond de fissure et l'axe x_1 porte la fissure sur la partie $x_1 < 0$. L'équation du modèle mécanique est:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ dans } \Omega, \\ \\ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0, \ \ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ sur } \Gamma_+ \cup \Gamma_- \ . \end{cases} \tag{1}$$

Pour simplifier nous supposerons que le support de la fonction $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ qui représente la force surfacique transverse appliquée à la structure est éloigné d'un voisinage circulaire $\mathcal{O}$ du fond de fissure.

- **Question 1** Donner formellement la formulation variationnelle du modèle en utilisant l'espace

  $$V = \{v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \ v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

  Montrer qu'il ne peut pas y avoir deux solutions dans cet espace.

- **Question 2** On se place sur le voisinage circulaire du point O de rayon R dont le cercle frontière est noté $\partial\mathcal{O}$. On considère les équations suivantes:

  $$\begin{cases} -\Delta z = 0 \ \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \ \text{ sur } (\Gamma_+ \cup \Gamma_-) \cap \mathcal{O}, \\ \\ z = u (\text{solution du modèle complet}) \text{ sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases} \tag{2}$$

  Montrer que $u = z$ sur $\mathcal{O} \cap \Omega$.

- **Question 3** On rappelle que si on note (r, θ) un système de coordonnées polaires centrées en O, nous avons (il serait bien vu de le redémontrer):

  $$\Delta z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}.$$

  Chercher une solution du système suivant par une méthode de séparation des variables en posant $z(r, \theta) = \alpha(r)\beta(\theta) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{O})$:

  $$\begin{cases} -\Delta z = 0 \ \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \ \text{ sur } (\Gamma_+ \cup \Gamma_-) \cap \mathcal{O}. \end{cases} \tag{3}$$

On trouvera une infinité dénombrable de solutions que l'on notera z_k.

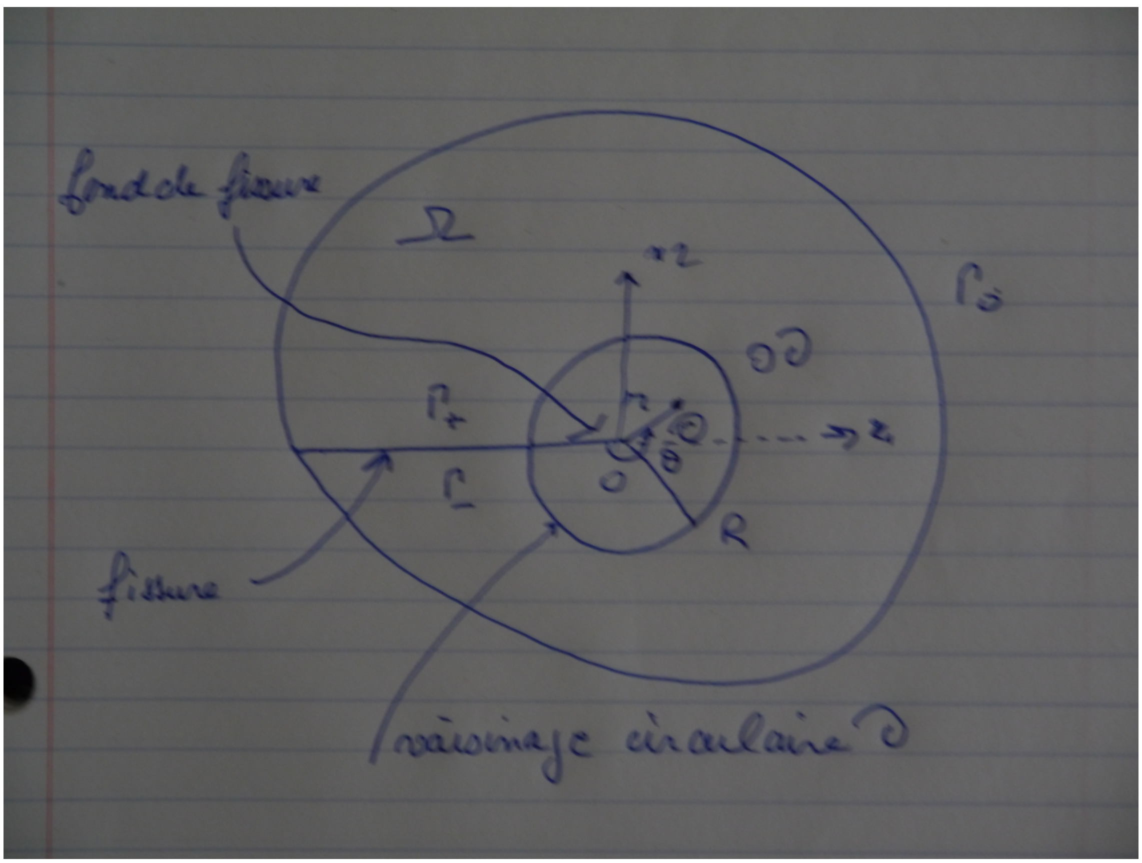
- **Question 4** Montrer en utilisant un résultat sur le séries de Fourier que la famille $\{z_k(R,\theta)$ est à un corefficient de normalisation près, une base hilbertienne de l'espace $L^2(]0,2\pi[)$. En déduire l'expression de u sur $\mathcal{O}$ à l'aide d'une série de fonctions z_k.

- **Question 5** On rappelle que l'on a (essayer de le retrouver):

$$\int_{\prime} |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R [r|\frac{\partial u}{\partial r}|^2 + \frac{1}{r}|\frac{\partial u}{\partial \theta}|^2] dr d\theta.$$

  En déduire que les normes des gradients de toutes les fonctions z_k sont bien de carré intégrable. Mais sont-elles toutes de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{O})$? Donner un exemple de fonction z_k qui ne l'est pas.

- **Question 6** Le gradient de la solution u représente à un coefficient près les contraintes mécanique qui agissent sur le matérau. Résumer les conclusions pratiques que vous pouvez tirer de l'étude précédente.



Retour à l'écran précédent: cliquez ici.