Exercice sur le cours 5 CSC108

April 30, 2013

On considère une plaque d'épaisseur supposée uniforme et égale à 2ε qui travaille en flexion, dont la surface moyenne occupe l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et dont la frontière est notée Γ. Le module de flexion est D il est relié aux données dela plaque par la formule:

$$D = \frac{2\varepsilon^3 E}{3(1-\nu^2)}, \text{ où } E \text{ est le module de Young et } \nu \text{ le coefficient de Poisson.}$$

La flèche est désignée par u et est solution du modèle variationnel suivant (on part directement du principe des travaux virtuels pour obtenir cette formulation en mécanique en introduisant les hypothèses ccinématiques de Kirchhoff-Love). Enfin A, B, C sont trois points linéairement indépendants de la frontière Γ de Ω. Plusieurs conditions aux limites sont envisagées dans cet exercice. Par ailleurs on acceptera la propriété suivante:

$$H^2(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \text{avec injection continue et même compacte.}$$

Par ailleurs l'espace $H_0^2(\Omega)$ est le sous-espace fermé de l'espace $H^2(\Omega)$ où les fonctions et leurs dérivées sont nulles sur la frontière de l'ouvert Ω. On notera que les trois espaces suivants sont bien des sous-espaces fermés de $H^2(\Omega)$ et à ce titre sont bien des espaces de Hilbert. Dans la suite la convention de sommation sur les indices répétés de 1 à 2 est adoptée. Posons:

$$V_1 = \{v \in H_0^2(\Omega)\}, \tag{1}$$

$$V_2 = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\} \tag{2}$$

$$V_3 = \{v \in H^2(\Omega),\ v(A) = v(B) = v(C) = 0\} \tag{3}$$

Le modèle de plaque en flexion consiste à trouver $u \in V$ (l'un des trois espaces ci-dessus) tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v \in V,\ a(u,v) = \mathcal{L}(v), \\ \text{où:} \\ \forall u, v \in V,\ a(u,v) = D \displaystyle\int_\Omega (1-\nu)\partial_{ij}u\partial_{ij}v + \nu \Delta u\ \Delta v,\ \mathcal{L}(v) = \int_\Omega fv,\ f \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{4}$$

Par commodité nous posons dans la suite:

$$m_{ij} = -D[(1-\nu)\partial_{ij}u + \nu \Delta u \delta_{ij}](\text{moment de flexion}) \text{ et } T_i = D\partial_i(\Delta u) \text{ effort tranchant.} \tag{5}$$

- **Question 1** Montrer qu'il existe une constante $c_1 > 0$ telle que:

$$\forall v \in V_1,\ a(v,v) \geq c_1 ||v||_{2,0,\Omega}^2. \tag{6}$$

- **Question 2** Montrer qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que:

$$\forall v \in V_2,\ a(v,v) \geq c_2||v||^2_{2,0,\Omega}. \tag{7}$$

- **Question 3** Montrer qu'il existe une constante $c_3 > 0$ telle que:

$$\forall v \in V_3,\ a(v,v) \geq c_3||v||^2_{2,0,\Omega}. \tag{8}$$

- **Question 4** Déduire de ce qui précède que dans les trois cas d'espaces choisis, le modèle (**??**) admet une solution unique.

- **Question 5** On se place dans le cas de l'espace V_2. La normale unitaire le long de Γ et sortante à Ω es notée $n = \{n_i\}$. En utilisant la formule de Stokes, montrer que sur la frontière Γ de Ω on a:

$$u = 0 \text{ et } \sum_{i,j\in\{1,2\}} m_{ij}n_jn_i = 0. \tag{9}$$

  Expliciter cette relation dans le cas d'une portion droite de la frontière Γ. En déduire le problème local résolu dans l cas où Ω est à frontière polygonale (un rectangle par exemple). Donner la solution analytique à l'aide d'une série de Fourier dans ce cas particulier où Ω est un rectangle de côté L et l, et l'origine placée à l'un des quatre sommets.

- **Question 6** On se place maintenant dans le cas de l'espace V_3. En utilisant la formule de Stokes, monter que sur Γ en dehors des points A, B et C les conditions aux limites vérifiées par la solution u de (**??**) sont (on note $t = \{t_i\}$ la tangente unitaire à Γ perpendiculaire à n):

$$m_{ij}n_in_j = 0 \text{ et } \partial_i(m_{kj}n_kt_j)t_i + \partial_i m_{ij}n_j = 0. \tag{10}$$

- **Question 7** On note *a priori* R_A, R_B, R_C trois nombres définis par:

$$\forall v \in H^2(\Omega),\ R_Av(A) + R_Bv(B) + R_C(C) = a(u,v) - \mathcal{L}(v). \tag{11}$$

  Montrer que cette définition a un sens. Quelles sont les significations mécaniques de ces quantités? En utilisant la formule de Stokes, donner les expressions de ces réactions d'appuis dans le cas où Ω est le rectangle traité à la question 5.

Retour à l'écran précédent: cliquez ici.