Exercice sur le cours 9

July 28, 2013

On considère l'équation de la chaleur sur l'ouvert $]0, L[$ où u est une foncion du temps donnée:

$$\begin{cases} \varrho c_v \dfrac{\partial T}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}(k \dfrac{\partial T}{\partial x}) = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0, \\ T(0,t),\ T(L,t) = u(t),\ t > 0, \\ T(x,0) = 0,\ 0 < x < L. \end{cases} \tag{1}$$

1 Première partie

On suppose que $\varrho > 0, c_v > 0$ et $k > 0$ sont constants.

- **Question 1** On pose
$$z(x,t) = T(x,t) - \frac{u}{L}(t).$$
Donner le modèle dont z est solution. Est-elle unique?

- **Question 2** Donner une formulation variationnelle du modèle dont z est solution. On pose $u(t) = T_e t$. Montrer que
$$\frac{\varrho c_v}{2} \int_0^L z^2(x,t)dx + k \int_0^t \int_0^L |\frac{\partial z}{\partial x}|^2(x,t)dxdt = \frac{\varrho c_v T_e}{6} L^2.$$

- **Question 3** On suppose ici que $u(0) = 0$ et $u(t) \geq 0$. En posant:
$$z^+(x,t) = \max(z(x,t), 0),$$
vérifier que: $z^+ \in H_0^1(]0, L[)$. Montrer que z^+ est solution de:
$$\begin{cases} \dfrac{\varrho c_v}{2} \displaystyle\int_0^L |z^+|^2 + k \int_0^t \int_0^L |\frac{\partial^2 z^+}{\partial x^2}|^2 \leq 0,\ 0 < x < 0,\ t > 0, \\ z^+(0,t) = z^+(L,t) = 0,\ t > 0,\ z^+(x,0) = 0,\ 0 < x < L. \end{cases}$$
En déduire que: $z^+(x,t) = 0,\ x < L,\ t > 0$. Puis que:
$$T(x,t) \leq \frac{u(t)x}{L}.$$

- **Question 4** On suppose toujours que $u(0) = 0$ et $u(t) \geq 0$. En utilisant un méthode similaire avec $z^- = \min(z, 0)$, montrer que $T(x,t) \geq 0$. En déduire un encadrement de T.

2 Seconde partie

On suppose toujours ϱ et c_v constants. Mais on pose ici $k = k_0 > 0$ si $x \in]0, L/2[$ et $k = k_1 > 0$ si $x \in]L/2, L[$.

- **Question 5** Quelles sont les conditions de transmission portant sur T et $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ en $x = L/2$.
- **Question 6** Montrer que le modèle dont T doit être solution, admet une solution unique.
- **Question 7** On suppose ici que $k_0 = 0$ et que $k_1 > 0$. Montrer que le modèle en T admet encore une solution unique. La caractériser sur $]0, L/2[$.

Retour à l'écran précédent: cliquez ici.