Exercice sur le cours 3 CSC108

June 12, 2013

1 Exercice sur un cas classique de poutre en flexion

Soit $D(x)$ une fonction constante par morceaux égale à D_0 sur $]0, L/2[$ et à D_1 sur $]L/2, L[$. On se donne une fonction f définie sur $]0, L[$. On considère l'équation de poutre suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) = u(L) = 0,\ \dfrac{d^2u}{dx^2}(0) = \dfrac{d^2u}{dx^2}(L) = 0, \\ \\ \dfrac{d^2(}{dx^2}(D\dfrac{d^2u}{dx^2}) = f,\ 0 < x < L. \end{array} \right. \tag{1}$$

- **Question 1** On pose $m = -D\dfrac{d^2u}{dx^2}$. Donner l'expression de m en fonction de la fonction f.

- **Question 2** On pose $q(x) = -\dfrac{m}{D}$. Donner l'expression de u en fonction de q puis de f mais sans détailler.

- **Question 3** Expliciter le résultat donnant m puis u, lorsque $f(x) = \text{constante} = F$.

- **Question 4** On introduit l'espace V des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty([0, L])$ qui s'annulent en $x = 0$ et en $x = L$. Construire la fomulation variationnelle du modèle de poutre étudié dans cet exercice sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in V, \\ \\ \forall v \in V,\ a(u, v) = l(v). \end{array} \right.$$

  Bien entendu, on précisera $a(.,.)$ et l.

- **Question 5** La fonction f et arbitraire mais de carré sommable sur $]0, L[$. On considère la famille de fonctions $\{w_i(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin(\dfrac{i\pi x}{L})\}$. Dire pourquoi c'est une base de V. Montrer que si D est constante on a $a(w_i, w_j) = 0$ si $i \neq j$. En déduire dans ce cas une expression générale de u sous forme d'une série.

- **Question 6** Toujours dans le cas où D est constante, donner l'expression des termes de la série lorsque f est aussi constante.

2 Exercice corrigé sur le cas d'une poutre en flexion contrainte par un obstacle

Soit le modèle ($F < 0$ constante sur $]0, L[$):

$$\boxed{\begin{array}{l} EI\dfrac{d^4u}{dx^4} = F + \lambda \text{ sur }]0, L[, \\[2ex] u(0) = \dfrac{du}{dx}(0) = \dfrac{d^2u}{dx^2}(L) = \dfrac{d^3u}{dx^3}(L) = 0, \\[2ex] \lambda \geq 0, \langle \lambda, u + h \rangle = 0,\ u \geq -h. \end{array}} \tag{2}$$

Ce modèle admet une solution unique que l'on peut aussi caractériser à l'aide de l'inéquation variationnelle:

$$\boxed{\begin{array}{l} u \in K = \{v \in H^2(]0, L[),\ v(0) = \dfrac{dv}{dx}(0) = 0,\ v \geq -h\}, \\[2ex] \forall v \in K,\ EI\displaystyle\int_0^L \dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{d^2(v-u)}{dx^2} \geq F\int_0^L (v-u). \end{array}} \tag{3}$$

et il admet une solution unique. Une dernière formulation consiste à caractériser la solution u comme l'unique solution du problème d'optmisation suivant:

$$\min_{v \in K} \frac{1}{2}\int_0^L EI|\frac{dv}{dx}|^2 - \int_0^L Fv. \tag{4}$$

Examinons si on peut avoir une solution telle que:

$$u > -h\ \forall x \in [0, x_0[\text{ et } u = -h\ \forall x \in [x_0, L].$$

Sur $x \in [0, x_0[$ on a puisque $\lambda = 0$:

$$u(x) = \frac{Fx^4}{24} + x^2(Ax + B),$$

et puisqu'en $x = x_0$ on doit avoir $u(x_0) = -h$ et $\dfrac{du}{dx}(x_0) = 0$ on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{Fx_0^4}{24} + x_0^2(Ax_0 + B) = -h, \\[2ex] \dfrac{Fx_0^3}{6} + 3Ax_0^2 + 2Bx_0 = 0. \end{array} \right.$$

La résolution de ce système conduit à:

$$A = \frac{2h}{x_0^3} - \frac{Fx_0}{12},\ B = \frac{Fx_0^2}{24} - \frac{3h}{x_0^2}.$$

On obtient ainsi en $x = x_0$:

$$\boxed{\frac{d^2u}{dx^2}(x_0) = \frac{6h}{x_0^2} + \frac{Fx_0^2}{12} \text{ et } \frac{d^3u}{dx^3}(x_0) = \frac{Fx_0}{2} + \frac{12h}{x_0^3}.}$$

Ceci nous donne l'expression de λ en reportant dans (2):

$$\boxed{\lambda = -F - EI[\frac{12h}{x_0^3} + \frac{Fx_0}{2}]\delta_{x_0} - EI[\frac{6h}{x_0^2} + \frac{Fx_0^2}{12}]\delta'_{x_0}.}$$

Cependant pour être acceptable, cette solution doit vérifier $\lambda \geq 0$. Si on prend une fonction arbitraire positive $\varphi \in \mathcal{D}([0, L])$ dont le support est contenu dans un voisinage arbitrairement petit du point x_0, cela signifie que l'on doit avoir:

$$\langle \lambda, \varphi \rangle \geq 0.$$

Mais la dérivée de φ peut avoir un signe arbitraire en $x = x_0$. sans être nulle en ce point. Ce qui viole la condition précédente. On pourrait aussi discuter sur le signe du coefficient devant δ_{x_0}. Il suffit pour trouver une autre contradiction, que:

$$0 < x_0 < (\frac{24h}{-F})^{.25}$$

ce qui est toujours possible en appuyant assez fort ($|F|$ assez grand) pour trouver une autre contradiction. En conclusion la solution obtenue n'est acceptable que si:

$$\frac{6h}{x_0^2} + \frac{Fx_0^2}{12} = 0$$

ce qui donne:

$$x_0^4 = -\frac{72h}{F}$$

et dans ce cas:

$$\lambda = -\frac{x_0 F}{3}\delta_0 - F \geq 0.$$

Compte tenu de l'unicité de la solution, c'est la solution.

Une autre discussion plus abstraite mais aussi plus générale, peut être menée en multipliant l'équation (2) par $x\dfrac{du}{dx}$ et en intégrant de 0 à L.

Retour à l'écran précédent: cliquez ici.