Exercice sur le cours 6 CSC108

April 30, 2013

On considère une membrane occupant l'ouvert Ω et ayant un trou localisé dans l'ouvert $\mathcal{O}$ intérieur à Ω. La frontière extérieur de Ω est notée Γ_0 et celle intérieure est celle de $\mathcal{O}$ notée $\partial\mathcal{O}$.

Le modèle de valeurs propres pour cette membrane est le suivant:

$$\begin{cases} \text{trouver } (u,\lambda) \in V \times \mathbb{R}, \text{ avec } V = \{v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}, \\ \\ \lambda u = -c^2 \Delta u \text{ dans } \Omega, \displaystyle\int_\Omega |u|^2 = 1, \\ \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases} \tag{1}$$

L'objet de ce problème est de quantifier les variations au premier ordre des valeurs propres λ solution du modèle (1) en fonction de la position du trou occupant l'ouvert $\mathcal{O}$. Pour cela nous utiliserons la méthode décrite à la fin du cours 6 (θ-méthode), mais avec cette fois des conditions de Neumann homogènes sur la frontière $\partial\mathcal{O}$.

- **Question 1** Construire la formulation variationnelle du problème (1) sous la forme standard en précisant l'espace V, H et les formes bilinéaires $a(.,.)$ et $m(.,.)$.

- **Question 2** Les conditions du théorème spectral sont-elles satisfaites? Que conclure?

- **Question 3** On utilise la même stratégie que dans le cours 6 en utilisant un champ θ ayant les mêmes propriétés que celles énoncées dans ce cours. et prolongeant la translation de vecteur d sur un voisinage de $\mathcal{O}$ et dont le support est strictement inclus dans Ω. Montrer que si l'on pose:
$$\begin{cases} \lambda^\eta = \lambda^0 + \eta\lambda^1 + \dots, \\ \\ u^\eta = u^0 + u^1 + \dots \end{cases} \tag{2}$$
alors (u^0, λ^0) est une solution du modèle (1) pour la position initiale du trou (ouvert $\mathcal{O}$) et de plus:
$$\lambda^1 = \int_\Omega [c^2|\nabla u^0|^2 - \lambda^0|u^0|^2]\mathrm{div}(\theta) - 2c^2(D\theta\nabla u^0, \nabla u^0). \tag{3}$$

- **Question 4** En utilisant la formule de Stokes comme dans le cours 6, montrer que:
$$\lambda^1 = \int_{\partial\mathcal{O}} [c^2|\frac{\partial u^0}{\partial s}|^2 - \lambda^0|u^0|^2](d,\nu). \tag{4}$$

- **Question 5** Si u^0 est un vecteur propre de la membrane correspondant à la valeur propre λ^0, discuter du signe de λ^1 en fonction de (d, ν) sur la frontière $\partial\mathcal{O}$. Que se passe-t-il pour λ^1 si on a par exemple u^0 =constante le long de $\partial\mathcal{O}$?

Retour à l'écran précédent: cliquez ici.