Exercice sur le cours 12 CSC108

July 29, 2013

On considère l'équation suivante dans laquelle on suppose que $U < c$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2U\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} + (U^2 - c^2)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x \in]0, L[, \quad \forall t > 0, \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x), \ \forall x \in]0, L[, \\ \varphi(0,t) = 0, \ \forall t > 0, \quad \varphi(L,t) = 0 \ \ \forall t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

- **Question 1** Mettre l'équation (1) sous la forme variationnelle suivante:

$$\forall \psi \in H_0^1(]0, L[), \quad \mathcal{M}(\ddot{\varphi}, \psi) + 2U\mathcal{C}(\dot{\varphi}, \psi) + \mathcal{A}(\varphi, \psi) = 0, \tag{2}$$

  avec les notations du cours. Préciser ici les expressions des formes bilinéaires en choisissant pour $\mathcal{C}$ une expression antisymétrique.

- **Question 2** On découpe le segment $]0, L[$ en intervalles de longueurs constantes $\Delta x = L/N$. On note V^h l'espace des fonctions affines sur chaque intervalle et continues sur $]0, L[$ s'annulant aux deux extrémités. La solution du modèle variationnel approché est notée φ^h. C'est une fonction du temps qui à chaque instant est dans l'espace V^h. Montrer que:

$$\mathcal{M}(\dot{\varphi}^h, \dot{\varphi}^h) + \mathcal{A}(\varphi^h, \varphi^h) = contante. \tag{3}$$

- **Question 3** On discrétise en temps en notant $\varphi_n^h \simeq \varphi(x, n\Delta t)$, on se propose d'étudier le schéma:

$$\begin{cases} \forall \psi \in V^h, \ \mathcal{M}(\varphi_{n+1}^h - 2\varphi_n^h + \varphi_{n-1}^h, \psi) + 2\Delta t U\mathcal{C}(\varphi_{n+1}^h - \varphi_n^h, \psi) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \Delta t^2\mathcal{A}(\varphi_n^h\psi) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

  Montrer qu'il est d'ordre 1 en temps.

- **Question 4** En choisissant dans (4): $\psi = \varphi_{n+1}^h - \varphi_n^h$, montrer que le schéma est stable.

- **Question 5** Ecrire le schéma sous forme matricielle et expliciter les matrices associées aux formes bilinéaires $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$. Quelle(s) difficulté(s) rencontre-t-on dans la résolution matricielle du schéma? Comment pourrait-on l'éviter?

Retour à l'écran précédent: cliquez ici.