

# Exercice sur le cours 11 CSC108

June 12, 2013

On considère l'équation suivante dans laquelle on suppose que  $U < c$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + (U^2 - c^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x \in ]0, L[, \quad \forall t > 0, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \forall x \in ]0, L[, \\ \varphi(0, t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (c + U) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right](L, t) = 0 \quad \forall t > 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

• **Question 1** On pose:

$$\xi = x - (c + U)t, \quad \eta = x + (c - U)t \quad (2)$$

Donner l'expression de l'équation (1) en fonction de  $\Phi(\xi, \eta) = \varphi(x, t)$ . Pour cela on remarquera que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -(c + U), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = (c - U), \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \\ \text{d'où:} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(c + U) + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(c - U), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}, \end{array} \right. \quad (3)$$

- **Question 2** Dédurre de la question précédente que  $\Phi(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$ . Comment est la solution  $\varphi$ ? Ecrire les conditions aux limites que doit satisfaire  $\varphi$  en fonction de l'expression trouvée.
- **Question 3** Expliquer comment résoudre graphiquement. dans le plan  $(x, t)$ .
- **Question 4** Montrer qu'à partir d'un temps  $T_s$  que l'on calculera, la solution  $\varphi$  est nulle.

Retour à l'écran précédent: [cliquez ici](#).