Exercice sur le cours 2 CSC108

April 30, 2013

On considère une corde de longueur L sur laquelle on a placé une petite masselotte de masse relative notée ε entre les points d'abscisses $x = a$ et $x = b$ ($a < b$). La fonction caractéristique de ce segment est notée $\chi_{[a,b]}$. On ne considère que des données initiales en position. Le modèle consiste à trouver $u(x,t)$ tel que:

$$\begin{cases} (1+\varepsilon\chi_{[a,b]})\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < L,\ \ t > 0, \\ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0,\ u(x,0) = u_0(x) \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

- **Question 1** Si $\varepsilon = 0$ et $u_0(x) = \sin(\dfrac{n\pi x}{L})$ donner la solution analytique de (1).

- **Question 2** On suppose $\varepsilon > 0$ mais petit. On pose *a priori*:

$$u = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots \tag{2}$$

En reportant cette expression dans (1) et en identifiant les termes de même puissance en ε dans l'expression résultante, donner l'expression de u^0 et montrer que u^1 est solution de:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} = -\chi_{[a,b]}\dfrac{\partial^2 u^0}{\partial t^2},\ 0 < x < L,\ \ t > 0, \\ \\ u^1(0,t) = u^1(L,t) = 0,\ u^1(x,0) = 0 \text{ et } \dfrac{\partial u^1}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

En déduire l'expression de u^1 sous forme d'une série de Fourier.

- **Question 3** On pose $\delta u = u - u^0 - \varepsilon u^1$. Montrer que δu est solution de:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} = -\chi_{[a,b]}\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2},\ 0 < x < L,\ \ t > 0, \\ \\ \delta u(0,t) = \delta u(L,t) = 0,\ \delta u(x,0) = 0 \text{ et } \dfrac{\partial \delta u}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

En multipliant cette relation par $\dfrac{\partial \delta u}{\partial t}$, montrer que:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\int_0^L |\frac{\partial \delta u}{\partial t}|^2 + \frac{c^2}{2}\int_0^L |\frac{\partial \delta u}{\partial x}|^2] \\ &= -\varepsilon^2 \int_a^b \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}\ \frac{\partial \delta u}{\partial t} \leq \frac{\varepsilon^4}{2}\int_a^b |\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}|^2 + \frac{1}{2}\int_0^L |\frac{\partial \delta u}{\partial t}|^2. \end{aligned} \tag{5}$$

- **Question 4** On pose:

$$A = \sup_{t\in[0,T]} \int_a^b |\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}|^2$$

et

$$g^\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\int_0^L |\frac{\partial \delta u}{\partial t}|^2.$$

0n remarquera que $g^\varepsilon(0) = 0$ (expliquez pourquoi).
Vérifier que $\forall t \in [0,T]$:

$$g^\varepsilon(t) \leq A\frac{t\varepsilon^4}{2} + \int_0^t g^\varepsilon(s)ds. \tag{6}$$

- **Question 5** En déduire que (c'est le lemme de Gronwall):

$$g^\varepsilon(t) \leq A\frac{\varepsilon^4 T}{2}e^t$$
puis que:
$$\forall t \in [0,T],\ [\frac{1}{2}\int_0^L |\frac{\partial \delta u}{\partial t}|^2 + \frac{c^2}{2}\int_0^L |\nabla \delta u|^2](t) \leq AC\varepsilon^4. \tag{7}$$

On explicitera la constante C en fonction de T.

- **Question 6** Pourriez-vous améliorer cette estimation pour T donné?

- **Question 7** Conclure en quelques phrases le résultat de cette étude.

Retour à l'écran précédent: cliquez ici.