Exercice sur le cours 1 CSC108

April 30, 2013

- **Question 1** Soit f une fonction définie sur le segment $]0, L[$ qui est supposée de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant
$$\frac{\partial f}{\partial x}(L) = 0,\ f(0) = 0.$$
On prolonge f sur le segment $]0, 2L[$ par symétrie autour du point de coordonnée $x = L$. On note $\tilde{f}$ cette nouvelle fonction.

  On prolonge maintenant $\tilde{f}$ sur $]-2L, 2L[$ par antisymétrie autour du point de coordonnée $x = 0$. On note $\tilde{\tilde{f}}$ cette nouvelle fonction.

  Construire le développement de série de Fourier de $\tilde{\tilde{f}}$ et montrer que sur $]0, L[$ on peut l'écrire:
$$f(x) = \sum_{k \geq 0} F_K \sin(\frac{2k+1}{2L}\pi x).$$

- **Question 2** Résoudre l'équation:
$$\lambda T + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < L$$
et donner les valeurs admissibles en λ pour avoir:
$$T(0) = \frac{\partial T}{\partial x}(L) = 0.$$
On note $w_i,\ i \in N$ l'ensemble de ces solutions vérifiant:
$$\int_0^L |w_i|^2 = 1.$$
Donner leurs expressions.

- **Question 3** Vérifier que l'ensemble des fonctions précédentes est bien une base hilbertienne de l'espace $L^2(]0, L[)$. Montre que l'on a aussi:
$$\int_0^L \frac{\partial w_i}{\partial x}\frac{\partial w_j}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } i \neq j.$$

- **Question 4** Soit $\xi > 0$. On considère l'équation:
$$\xi T - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < L,\ \ T(0) = 0,\ \frac{\partial T}{\partial x}(L) = 1.$$
Par un calcul direct donner la solution explicite de cette équation.

- **Question 5** En utilisant la méthode variationnelle de Lax, vérifier que T peut aussi s'écrire sous forme d'une série à l'aide des fonctions w_i. Exprimer la quantité:

$$q(L) = -\frac{\partial T}{\partial x}(L),$$

à l'aide d'une série faisant intervenir les dérivées des fonctions w_i en $x = L$.

- **Question 6** Quel paradoxe apparent observez-vous? Pouvez-vous en donner une explication? (C'est le paradoxe de Gibbs voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Phénomène de Gibbs).

Retour à l'écran précédent: cliquez ici.