Exercice sur le cours 7 CSC108

May 13, 2013

On considère un ouvert borné Ω du plan de frontière Γ elle même de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. La normale unitaire le long de la frontière est notée ν. On considère un écoulement représenté par le champ de vitesse $a \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ qui traverse l'ouvert Ω. On note Γ_0 et Γ_1 les deux portions de frontière de cet ouvert définies par:

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega,\ (a(x), \nu) < 0\}, \\ \\ \Gamma_1 = \{x \in \partial\Omega,\ (a(x), \nu) > 0\}. \end{cases} \tag{1}$$

On désigne par a_0 et k deux constantes strictement positives. Le modèle de propagation thermique auquel nous-nous intéressons est le suivant:

$$\begin{cases} a_0 T + (a, \nabla T) - k\Delta T = r \text{ dans } \Omega, \\ \\ T = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0,\ \dfrac{\partial T}{\partial \nu} = g \ \text{ sur } \Gamma_1. \end{cases} \tag{2}$$

On suppose par exemple que $r \in L^2(\Omega),\ g \in L^2(\Gamma_1)$On introduit l'espace fonctionnel:

$$V = \{v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0\}. \tag{3}$$

1 Première partie

- **Question 1** Montrer formellement que la solution cherchée T doit être solution de l'équation variationnelle suivante:

$$\forall v \in V,\ \int_\Omega [k(\nabla T, \nabla v) + a_0 T v + (a, \nabla T) v] = \int_\Omega r v + \int_{\Gamma_1} g v. \tag{4}$$

  On suppose que:

$$\sup_{x \in \Omega} |a(x)| < \inf(k, a_0) \tag{5}$$

  Montrer qu'il existe une constante c que l'on précisera et telle que:

$$\forall v \in V,\ a(v,v) = k \int_\Omega |\nabla v|^2 + a_0 \int_\Omega v^2 + \int_\Omega (a, \nabla v) v \geq c ||v||^2_{1,2,\Omega}. \tag{6}$$

  En déduire, que dans ce cas, le modèle variationnel (4) admet une solution unique, après avoir vérifié les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

- **Question 2** On abandonne l'hypothèse (5). Montrer en utilisant le théorème de Garding que (4) admet une solution unique si la forme bilinéaire $a(.,.)$ est définie (noyau réduit à $\{0\}$).

2 Seconde partie

- **Question 3** On suppose que Ω est un rectangle de côtés L et l. On pose $a = (a_1, 0)$ où a_1 est une constante. Construire le noyau de la forme bilinéaire $a(.,.)$ et discuter en fonction de k, a_0 et a_1. Donner un exemple où il n'est pas réduit à $\{0\}$. Sous quelle(s) condition(s) portant sur r et g peut-on assurer qu'il existe une solution à (4). Est-elle unique?

- **Question 4** On suppose que $r = 0,\ g = constante$ et que le vecteur a est constant sur Ω. Nous noterons τ le vecteur tangent à $\partial\Omega$ et par s l'abscisse curviligne. En multipliant l'équation (1) par $(a, \nabla T)$ et en intégrant sur l'ouvert Ω, montrer que:

$$\int_\Omega |(a, \nabla T)|^2 = -a_0 \int_{\Gamma_1} (a, \nu)\frac{T^2}{2} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (a, \nu) k |\frac{\partial T}{\partial \nu}|^2 - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (a, \tau) k |\frac{\partial T}{\partial s}|^2. \quad (7)$$

Retour à l'écran précédent: cliquez ici.