Exercices sur le cours 8

May 17, 2013

Exercice 1

On considère un quadilatère $\mathcal{Q}$ du plan ramené au système de coordonnées $(0; x_1, x_2)$ de sommets $\mathbf{a}_i, \ \ i = 1, 4$. On utilisera également le carré de référence muni du système de coordonnées $(0; \xi_1, \xi_2)$ et noté $\hat{\mathcal{Q}}$ de sommets $\hat{\mathbf{a}}_i, \ \ i = 1, 4$, avec $\hat{\mathbf{a}}_1 = (1, 1), \ \hat{\mathbf{a}}_2 = (-1, 1), \ \hat{\mathbf{a}}_3 = (-1, -1), \ \hat{\mathbf{a}}_4 = (1, -1)$. On introduit également les quatres fonctions $\hat{\eta}_i(\xi_1, \xi_2)$ définies par:

$$\begin{cases} \hat{\eta}_1(\xi_1, \xi_2) = \dfrac{(1+\xi_1)(1+\xi_2)}{4}, \ \hat{\eta}_2(\xi_1, \xi_2) = \dfrac{(1-\xi_1)(1+\xi_2)}{4}, \\ \\ \hat{\eta}_3(\xi_1, \xi_2) = \dfrac{(1-\xi_1)(1-\xi_2)}{4}, \ \hat{\eta}_4(\xi_1, \xi_2) = \dfrac{(1+\xi_1)(1-\xi_2)}{4}. \end{cases}$$

Le quadrilatère $\mathcal{Q}$ est alors l'image de $\hat{\mathcal{Q}}$ par l'application:

$$\hat{m} = (\xi_1, \xi_2) \in \hat{\mathcal{Q}} \to m = F(\hat{m}) = \sum_{i=1,4} \eta_i(\xi_1, \xi_2)\mathbf{a}_i.$$

A une fonction f définie sur $\mathcal{Q}$ on associe la fonction $\hat{f}$ définie sur $\hat{\mathcal{Q}}$ par:

$$\hat{f}(\xi_1, \xi_2) = f o F(\xi_1, \xi_2).$$

- **Question 1** Exprimer $\hat{f}$ aux points $\hat{\mathbf{a}}_i$ en fonction de f aux points $\mathbf{a}_i$. Si f est affine le long d'un segment $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$ (6 possibilités) quelle est la nature de $\hat{f}$ sur les segments $\hat{\mathbf{a}}_i\hat{\mathbf{a}}_j$?

- **Question 2** Quel est l'image du point O par F dans $\mathcal{Q}$? Caractériser géométriquement ce point.

- **Question 3** Exprimer la position du point de concours des diagonales de $\mathcal{Q}$ à l'aide des quatre sommets. Dans quel cas ce point coincide-t-il avec l'image de O par F?

- **Question 4** On note $\det(DF)$ le déterminant de la matrice jacobienne de F. On a donc:

$$Df = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}$$

  Dans quel cas $\det(DF)$ est-il constant?

- **Question 5** Soit $\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ le gradient de la fonction f. On considère l'expression:

$$\hat{\nabla}\hat{f}(\hat{m}) = DF(m)\nabla f(m) \text{ où } m = F(\hat{m}).$$

  Montrer que:

$$\int_{\hat{\mathcal{Q}}} |DF^{-1}\hat{\nabla}\hat{f}|^2 \det(DF) = \int_{\mathcal{Q}} |\nabla f|^2.$$

  Dans quel cas DF^{-1} est-elle une matrice à coefficients constants? Que se passe-t-il si les points $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ (par exemple) se rapprochent? Si maintenant le quadrilatère $\mathcal{Q}$ n'est plus convexe (un angle rentrant), que peut-on dire de DF^{-1}?

Exercice 2

Soit un triangle $\mathcal{T}$ du plan de sommets $\mathbf{a}_i,\ i = 1, 2, 3$.

- **Question 1** Montrer que

$$||(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \wedge (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1)|| = 2aire(\mathcal{T}).$$

- **Question 2** Soit $\mathbf{h}$ le pied de la hauteur issue de $\mathbf{a}_1$ dans le triangle $\mathcal{T}$. Montrer que:

$$\mathbf{h} = \mathbf{a}_2 + \theta(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2) \text{ avec } \theta = \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2)}{||\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2||^2}.$$

- **Question 3** On note λ_1 la coordonnée barycentrique sur le triangle $\mathcal{T}$ relative au sommet $\mathbf{a}_1$. Montrer que:

$$\nabla\lambda_1 = \frac{1}{||\mathbf{a}_1 - \mathbf{h}||^2}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{h}).$$

- **Question 4** Montrer que:

$$\int_{\mathcal{T}} |\nabla\lambda_1|^2 = \frac{||\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2||}{2||\mathbf{a}_1 - \mathbf{h}||}$$

- **Question 5** On note λ_2 la coordonnée barycentrique relative au sommet $\mathbf{a}_2$. Calculez: $\int_{\mathcal{T}} (\nabla\lambda_1, \nabla\lambda_2)$. Retour à l'écran précédent: cliquez ici.